Systematischer Untersuchungsplan zur Brücke zwischen komplexer Analysis, mehrstufigen Bernoulli-Experimenten und Belnap-Logik

Arbeitsprogramm, Leitfragen, Testobjekte und erwarteter Mehrwert

---

Leitidee. Die zentrale Hypothese lautet: Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann als *probabilistische Belnap-Proposition* interpretiert werden. Genauer: Die Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ kodiert einen zweistufigen Zufallsversuch, der eine natürliche Wahrscheinlichkeitsverteilung auf die vier Belnap-Werte

$$\mathsf{N}\text{ (neither)},\qquad \mathsf{T}\text{ (true only)},\qquad \mathsf{F}\text{ (false only)},\qquad \mathsf{B}\text{ (both)}$$

induziert. Das Forschungsprogramm untersucht, welchen *beidseitigen Nutzen* diese Brücke hat: Welche neuen Begriffe, Sätze, Heuristiken und Rechenmethoden entstehen für
1) die komplexe Analysis und algebraische Funktionentheorie,
2) die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Basis mehrstufiger Bernoulli-Experimente,
3) die Belnap-Logik und bilattizische Semantik.

1 Zielbild und strategische Frage

Das Ziel ist nicht nur eine weitere Interpretation komplexer Zahlen, sondern eine *arbeitsfähige Dreifach-Übersetzung*:

$$\text{komplexe Zahl / analytisches Objekt} \longleftrightarrow \text{stochastisches Experiment} \longleftrightarrow \text{Belnap-semantischer Zustand.}$$

Die systematische Leitfrage lautet daher:

> *Welche Probleme aus Logik und Wahrscheinlichkeitsrechnung lassen sich durch komplex-analytische Werkzeuge präziser formulieren oder lösen, und welche analytischen Objekte erhalten durch die probabilistisch-logische Lesart einen neuen inhaltlichen Sinn?*

Daraus folgen drei Forschungsrichtungen:

1. **Analysis → Logik/WS:** Nullstellen, Polstellen, Konformalität, Möbius-Wirkung, Integrale und Ableitungen werden als logische und probabilistische Strukturen gelesen.
2. **WS → Analysis/Logik:** Mehrstufige Bernoulli-Experimente liefern ein diskretes, aber systematisch verallgemeinerbares Modell für komplexe Zahlen und Funktionen.
3. **Logik → Analysis/WS:** Belnap-Werte und bilattizische Ordnungen dienen als semantischer Rahmen, um analytische Symmetrien, Invarianzen und Singularitäten neu zu interpretieren.

2 Gemeinsame formale Grundsprache

2.1 Basiskonstruktion

Für $z = re^{i\varphi}$ mit $0 \le r \le 1$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ werden zwei unabhängige Zufallsvariablen $u_1, u_2 \sim U[0,1]$ betrachtet und die Ereignisse definiert als

$$A = \{u_1 \le r\}, \qquad B = \left\{u_2 \le \frac{\varphi}{2\pi}\right\}.$$

Interpretation:

- $A =$ Evidenz *für* eine Proposition p,
- $B =$ Evidenz *gegen* eine Proposition p.

Dann entstehen die vier Belnap-Werte als Regionen:

$$\mathsf{N} = A^c \cap B^c, \qquad \mathsf{T} = A \cap B^c, \qquad \mathsf{F} = A^c \cap B, \qquad \mathsf{B} = A \cap B.$$

Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung ist

$$\mu_z = \big(\mathrm{Prob}(\mathsf{N}), \mathrm{Prob}(\mathsf{T}), \mathrm{Prob}(\mathsf{F}), \mathrm{Prob}(\mathsf{B})\big) = \big((1-r)(1-s),\, r(1-s),\, (1-r)s,\, rs\big),$$

mit $s = \varphi/(2\pi)$.

Für $|z| > 1$ wird die Inversionsregel verwendet:

$$\rho(z) := \min\{|z|, |z|^{-1}\}, \qquad s(z) := \frac{\arg z}{2\pi} \in [0, 1),$$

und dann

$$\mu_z := \big((1-\rho)(1-s),\, \rho(1-s),\, (1-\rho)s,\, \rho s\big).$$

2.2 Erste programmatische Konsequenz

Jede komplexe Zahl wird so zu einer *Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Belnap*. Kurzform zum Denken:

$$z \rightsquigarrow \mu_z \in \mathrm{Prob}\{\mathsf{N}, \mathsf{T}, \mathsf{F}, \mathsf{B}\}.$$

Die mathematisch präzisere Langform lautet: Eine komplexe Zahl kodiert eine probabilistische Belnap-Semantik einer Proposition.

2.3 Erste Prüfkriterien

Eine Konstruktion dieser Art ist nur dann tragfähig, wenn mindestens die folgenden Bedingungen erfüllt oder systematisch untersucht werden:

1. **Funktorialität unter natürlichen Operationen:** Wie verhalten sich Konjugation, Multiplikation, Addition, Skalierung und Inversion auf der Ebene der Verteilungen?
2. **Logische Verträglichkeit:** Welche Belnap-Operationen oder bilattizischen Ordnungen passen natürlich zur komplexen Geometrie?
3. **Analytische Verträglichkeit:** Welche holomorphen, meromorphen oder Möbius-symmetrischen Operationen wirken als Transformationen probabilistisch-logischer Zustände?
4. **Nichttrivialität:** Gibt es Resultate, die in einer der drei Sprachen sichtbar, in einer anderen aber schwer zu entdecken wären?

3 Ausgearbeiteter Anfang: der funktorielle Kern

Dieser Abschnitt ist bereits mehr als ein bloßes Arbeitsprogramm. Hier werden die ersten strukturellen Sätze vollständig formuliert und bewiesen. Das dient zwei Zielen:

1. Die Basiskonstruktion soll in eine mathematisch präzise Sprache übersetzt werden.
2. Die späteren Fragen zu Polynomen, Möbius-Transformationen, Zetafunktionen und Holomorphie sollen auf einem sauberen Fundament aufbauen.

3.1 Kanonische Repräsentanten und Parameterraum

Die Semantik identifiziert eine Zahl z und ihre Inversion am Einheitskreis insofern, als beide denselben radialen Informationsgehalt tragen. Deshalb ist es zweckmäßig, zunächst den *kanonischen Repräsentanten* im abgeschlossenen Einheitskreis zu definieren.

Definition 3.1 (kanonischer Repräsentant). *Für $z \in \mathbb{C}^\times$ mit Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$, $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, sei*

$$\kappa(z) := \rho(z)e^{i\varphi}, \qquad \rho(z) := \min\{r, r^{-1}\} \in (0, 1].$$

Für $z = 0$ setzen wir $\kappa(0) := 0$ und $\rho(0) := 0$.

Damit liegt $\kappa(z)$ immer in der abgeschlossenen Einheitsdisk. Die semantisch relevanten Daten sind also nicht das ursprüngliche r, sondern nur $\rho(z)$ und der Winkel φ.

Definition 3.2 (Belnap-Parameter). *Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir*

$$\beta(z) = (p(z), q(z))$$

mit

$$p(z) := \rho(z) \in [0, 1], \qquad q(z) := \frac{\arg \kappa(z)}{2\pi} \in [0, 1),$$

wobei für $z = 0$ konventionsgemäß $q(0) := 0$ gesetzt wird.

Bemerkung 3.3. *Die Zahl $p(z)$ misst die Stärke der Evidenz* für *eine Proposition; die Zahl $q(z)$ misst die Stärke der Evidenz* gegen *dieselbe Proposition. Das Paar (p, q) ist also die eigentliche Schnittstelle zwischen komplexer Geometrie, Wahrscheinlichkeit und Belnap-Semantik.*

3.2 Von (p,q) zu einer Verteilung auf FOUR

Zu $(p,q) \in [0,1]^2$ betrachten wir zwei unabhängige Bernoulli-Ereignisse

$$A = \{u_1 \le p\}, \qquad B = \{u_2 \le q\},$$

wobei $u_1, u_2 \sim U[0,1]$ unabhängig sind. Wie zuvor wird A als Evidenz *für* und B als Evidenz *gegen* eine Proposition gelesen. Daraus entstehen die vier Belnap-Werte

$$\mathsf{N} = A^c \cap B^c, \qquad \mathsf{T} = A \cap B^c, \qquad \mathsf{F} = A^c \cap B, \qquad \mathsf{B} = A \cap B.$$

Satz 3.4 (explizite FOUR-Verteilung)**.** *Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ mit $\beta(z) = (p,q)$ gehört die Wahrscheinlichkeitsverteilung*

$$\mu_z = (\mu_{\mathsf{N}}, \mu_{\mathsf{T}}, \mu_{\mathsf{F}}, \mu_{\mathsf{B}}) = ((1-p)(1-q),\ p(1-q),\ (1-p)q,\ pq).$$

Proof. Wegen der Unabhängigkeit von A und B gilt

$$\mathrm{Prob}(A) = p, \qquad \mathrm{Prob}(B) = q.$$

Damit erhält man unmittelbar

$$\mathrm{Prob}(\mathsf{B}) = \mathrm{Prob}(A \cap B) = \mathrm{Prob}(A)\mathrm{Prob}(B) = pq.$$

Ebenso ist

$$\mathrm{Prob}(\mathsf{T}) = \mathrm{Prob}(A \cap B^c) = \mathrm{Prob}(A)\mathrm{Prob}(B^c) = p(1-q),$$

weil A und B^c ebenfalls unabhängig sind. Genauso folgen

$$\mathrm{Prob}(\mathsf{F}) = \mathrm{Prob}(A^c \cap B) = \mathrm{Prob}(A^c)\mathrm{Prob}(B) = (1-p)q$$

und

$$\mathrm{Prob}(\mathsf{N}) = \mathrm{Prob}(A^c \cap B^c) = \mathrm{Prob}(A^c)\mathrm{Prob}(B^c) = (1-p)(1-q).$$

Alle vier Zahlen sind nichtnegativ und summieren sich zu

$$(1-p)(1-q) + p(1-q) + (1-p)q + pq = 1.$$

Damit ist die Formel bewiesen. □

Satz 3.5 (Randwahrscheinlichkeiten rekonstruieren p und q)**.** *Für $\mu_z = ((1-p)(1-q),\ p(1-q),\ (1-p)q,\ pq)$ gelten die Rekonstruktionsformeln*

$$p = \mu_{\mathsf{T}} + \mu_{\mathsf{B}}, \qquad q = \mu_{\mathsf{F}} + \mu_{\mathsf{B}}.$$

Proof. Einfaches Ausmultiplizieren liefert

$$\mu_{\mathsf{T}} + \mu_{\mathsf{B}} = p(1-q) + pq = p,$$

und ebenso

$$\mu_{\mathsf{F}} + \mu_{\mathsf{B}} = (1-p)q + pq = q.$$

Das heißt: Die gesamte positive Evidenz ist gerade die Wahrscheinlichkeit von "true only oder both", und die gesamte negative Evidenz ist gerade die Wahrscheinlichkeit von "false only oder both". □

Korollar 3.6 (Bild der Konstruktion im Wahrscheinlichkeits-Simplex)**.** *Eine Verteilung* $\mu = (\mu_{\mathsf{N}}, \mu_{\mathsf{T}}, \mu_{\mathsf{F}}, \mu_{\mathsf{B}})$ *auf* $\{\mathsf{N}, \mathsf{T}, \mathsf{F}, \mathsf{B}\}$ *stammt genau dann aus der obigen Konstruktion, wenn sie die Nebenbedingung*

$$\mu_{\mathsf{N}}\mu_{\mathsf{B}} = \mu_{\mathsf{T}}\mu_{\mathsf{F}}$$

erfüllt. In diesem Fall sind $p = \mu_{\mathsf{T}} + \mu_{\mathsf{B}}$ *und* $q = \mu_{\mathsf{F}} + \mu_{\mathsf{B}}$*.*

Proof. Zunächst gilt für jede aus (p, q) konstruierte Verteilung

$$\mu_{\mathsf{N}}\mu_{\mathsf{B}} = ((1-p)(1-q))(pq) = p(1-q)(1-p)q = \mu_{\mathsf{T}}\mu_{\mathsf{F}}.$$

Umgekehrt sei eine Verteilung μ mit dieser Gleichung gegeben. Setze

$$p := \mu_{\mathsf{T}} + \mu_{\mathsf{B}}, \qquad q := \mu_{\mathsf{F}} + \mu_{\mathsf{B}}.$$

Dann gilt

$$p(1-q) = (\mu_{\mathsf{T}} + \mu_{\mathsf{B}})(\mu_{\mathsf{N}} + \mu_{\mathsf{T}}) = \mu_{\mathsf{T}}(\mu_{\mathsf{N}} + \mu_{\mathsf{T}} + \mu_{\mathsf{F}} + \mu_{\mathsf{B}}) = \mu_{\mathsf{T}},$$

weil wegen $\mu_{\mathsf{N}}\mu_{\mathsf{B}} = \mu_{\mathsf{T}}\mu_{\mathsf{F}}$ die gemischten Terme genau wegfallen. Direkt und übersichtlicher rechnet man

$$p(1-q) = (\mu_{\mathsf{T}} + \mu_{\mathsf{B}})(1 - \mu_{\mathsf{F}} - \mu_{\mathsf{B}}) = (\mu_{\mathsf{T}} + \mu_{\mathsf{B}})(\mu_{\mathsf{N}} + \mu_{\mathsf{T}}).$$

Nach Ausmultiplizieren erhält man

$$\mu_{\mathsf{T}}\mu_{\mathsf{N}} + \mu_{\mathsf{T}}^2 + \mu_{\mathsf{B}}\mu_{\mathsf{N}} + \mu_{\mathsf{B}}\mu_{\mathsf{T}}.$$

Mit der Bedingung $\mu_{\mathsf{B}}\mu_{\mathsf{N}} = \mu_{\mathsf{T}}\mu_{\mathsf{F}}$ und der Normierung $\mu_{\mathsf{N}} + \mu_{\mathsf{T}} + \mu_{\mathsf{F}} + \mu_{\mathsf{B}} = 1$ wird dies zu

$$\mu_{\mathsf{T}}(\mu_{\mathsf{N}} + \mu_{\mathsf{T}} + \mu_{\mathsf{F}} + \mu_{\mathsf{B}}) = \mu_{\mathsf{T}}.$$

Genauso folgen $(1-p)q = \mu_{\mathsf{F}}$, $pq = \mu_{\mathsf{B}}$ und $(1-p)(1-q) = \mu_{\mathsf{N}}$. □

Bemerkung 3.7. *Dieser Korollar ist inhaltlich wichtig: Die Konstruktion liefert* nicht jede *Verteilung auf FOUR, sondern genau die Produktverteilungen, die aus zwei unabhängigen Bernoulli-Stufen entstehen. Die komplexe Ebene parametrisiert also eine ausgezeichnete zweidimensionale Teilmannigfaltigkeit des Wahrscheinlichkeits-Simplex auf FOUR.*

3.3 Elementare Operationen auf der komplexen Seite

Im Folgenden wird immer mit dem kanonischen Repräsentanten $\kappa(z) = pe^{2\pi iq}$ gearbeitet. Dann sind $p \in [0, 1]$ und $q \in [0, 1)$. Die Ergebnisse sind daher Aussagen über die *Semantik* eines komplexen

Punktes, nicht notwendig über die rohe Operation auf ganz $\mathbb{C}$ ohne Inversions-Identifikation.

Proposition 3.8 (Rotation). *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $R_\alpha(z) = e^{i\alpha}z$ gilt*

$$\beta(R_\alpha z) = \left(p(z),\ q(z) + \frac{\alpha}{2\pi} \bmod 1\right).$$

Insbesondere bleibt die positive Evidenz p unter Rotation erhalten; nur die negative Evidenz q wird zyklisch verschoben.

Proof. Multiplikation mit $e^{i\alpha}$ verändert den Betrag nicht. Also bleibt auch $\rho(z)$ erhalten, mithin $p(R_\alpha z) = p(z)$. Der Winkel vergrößert sich um α, daher wird q um $\alpha/(2\pi)$ verschoben. Da Winkel modulo 2π gelesen werden, geschieht dies modulo 1. □

Proposition 3.9 (Positive Skalierung). *Für $\lambda > 0$ und $S_\lambda(z) = \lambda z$ gilt*

$$\beta(S_\lambda z) = \begin{cases} (\lambda p, q), & \textit{falls } \lambda p \le 1, \\ ((\lambda p)^{-1}, q), & \textit{falls } \lambda p > 1. \end{cases}$$

Die Skalierung verändert also nur den Evidenz-für-Parameter p; der Evidenz-gegen-Parameter q bleibt unverändert.

Proof. Ist $\kappa(z) = pe^{2\pi iq}$ mit $0 \le p \le 1$, dann hat $\lambda\kappa(z)$ denselben Winkel $2\pi q$ und den Betrag λp. Liegt $\lambda p \le 1$, so ist dies bereits der kanonische Repräsentant. Liegt $\lambda p > 1$, dann greift die Inversionsregel und der kanonische Repräsentant hat den Betrag $(\lambda p)^{-1}$. Der Winkel ändert sich in keinem der beiden Fälle. □

Proposition 3.10 (Konjugation). *Für die komplexe Konjugation $c(z) = \overline{z}$ gilt*

$$\beta(\overline{z}) = \begin{cases} (p, 0), & \textit{falls } q = 0, \\ (p, 1-q), & \textit{falls } 0 < q < 1. \end{cases}$$

Konjugation ist also nicht *Belnap-Negation, sondern eine Spiegelung des Winkelparameters.*

Proof. Konjugation ändert den Betrag nicht. Auf der Winkelseite wird $e^{2\pi iq}$ zu $e^{-2\pi iq}$, also zu $e^{2\pi i(1-q)}$ für $q \neq 0$. Für $q = 0$ bleibt der Punkt auf der positiven reellen Achse fixiert. □

Proposition 3.11 (Inversion am Einheitskreis). *Auf der semantischen Ebene wirkt Inversion trivial. Genauer: Für $I(z) = 1/\overline{z}$ mit $z \neq 0$ gilt*

$$\beta(I(z)) = \beta(z).$$

Proof. Schreibe $z = re^{i\varphi}$. Dann ist $I(z) = r^{-1}e^{i\varphi}$. Nach Definition von ρ gilt

$$\rho(r^{-1}) = \min\{r^{-1}, r\} = \rho(r).$$

Der Winkel bleibt gleich. Also stimmen beide Parameter überein. □

Proposition 3.12 (Potenzen)**.** *Für $n \in \mathbb{N}$ und $P_n(z) = z^n$ gilt*

$$\beta(z^n) = \left(\min\{p^n, p^{-n}\},\ nq \bmod 1\right)$$

mit der Vereinbarung, dass im bereits kanonischen Fall $0 \le p \le 1$ einfach

$$\beta(z^n) = (p^n,\ nq \bmod 1)$$

gilt.

Proof. Aus $\kappa(z) = pe^{2\pi iq}$ folgt

$$(\kappa(z))^n = p^n e^{2\pi inq}.$$

Solange mit dem kanonischen Repräsentanten gearbeitet wird, ist $p \le 1$, also auch $p^n \le 1$, und keine neue Inversion ist nötig. Der Winkel vervielfacht sich um den Faktor n und wird modulo 2π bzw. modulo 1 gelesen. □

Bemerkung 3.13. *Gerade diese Formel erklärt, warum die Polynome $x^n - 1$ und die zyklotomischen Polynome so natürlich in das Programm gehören: Potenzieren ist auf der Belnap-Seite eine deterministische Dynamik, die den Winkel vervielfacht und den radialen Anteil systematisch verändert.*

3.4 Addition und Interferenz

Die Addition ist der erste Punkt, an dem sich zeigt, dass die Brücke nicht trivial ist.

Satz 3.14 (explizite Additionsformel)**.** *Seien*

$$z_1 = p_1 e^{2\pi iq_1}, \qquad z_2 = p_2 e^{2\pi iq_2}$$

kanonische Repräsentanten. Dann hat die Summe $z_1 + z_2$ den Betrag

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos(2\pi(q_1 - q_2))}$$

und den Winkel

$$\arg(z_1 + z_2) = \operatorname{atan2}\Big(p_1 \sin(2\pi q_1) + p_2 \sin(2\pi q_2),\ p_1 \cos(2\pi q_1) + p_2 \cos(2\pi q_2)\Big).$$

Somit ist $\beta(z_1 + z_2)$ explizit bestimmbar, aber die beiden Koordinaten entkoppeln sich nicht: Die Addition mischt radiale und winkelige Information über einen Interferenzterm.

Proof. Mit

$$z_j = p_j \cos(2\pi q_j) + ip_j \sin(2\pi q_j)$$

ist

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

mit

$$x_j = p_j \cos(2\pi q_j), \qquad y_j = p_j \sin(2\pi q_j).$$

Daher folgt die Winkel-Formel unmittelbar aus der Definition von atan2. Für den Betrag verwendet man

$$|z_1 + z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2,$$

also

$$|z_1 + z_2|^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\big(\cos(2\pi q_1)\cos(2\pi q_2) + \sin(2\pi q_1)\sin(2\pi q_2)\big).$$

Mit der Identität $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b)$ ergibt sich die Behauptung. □

Proposition 3.15 (Interferenzphänomene)**.** *Für festes p_1, p_2 hängt der radiale Parameter der Summe wesentlich von der Phasendifferenz $q_1 - q_2$ ab. Insbesondere gilt:*

1. *Sind $q_1 = q_2$, so ist $|z_1 + z_2| = p_1 + p_2$ (konstruktive Interferenz).*
2. *Sind $q_1 - q_2 = 1/2$, so ist $|z_1 + z_2| = |p_1 - p_2|$ (destruktive Interferenz).*
3. *Für $p_1 = p_2$ und $q_1 - q_2 = 1/2$ ist sogar $z_1 + z_2 = 0$.*

Proof. In der Additionsformel tritt der Term $\cos(2\pi(q_1 - q_2))$ auf. Für $q_1 = q_2$ ist dieser Term gleich 1, also

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2} = p_1 + p_2.$$

Für $q_1 - q_2 = 1/2$ ist der Kosinus gleich -1, also

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2} = |p_1 - p_2|.$$

Setzt man zusätzlich $p_1 = p_2$, so erhält man $|z_1 + z_2| = 0$, also $z_1 + z_2 = 0$. □

Bemerkung 3.16. *Genau hier erscheint zum ersten Mal ein potentieller Mehrwert der Brücke: Auf der logischen Seite kann man die Addition als* Kontextkopplung mit Interferenz *lesen; auf der analytischen Seite ist sie einfach Vektoraddition in der Ebene. Die Theorie könnte also einen präzisen Rahmen dafür liefern, wann zwei probabilistische Belnap-Propositionen sich verstärken oder gegenseitig auslöschen.*

3.5 Belnap-Operationen direkt auf den Parametern

Die folgenden Formeln zeigen, dass auf der logischen Seite sehr natürliche Operationen existieren, die direkt durch die Evidenzparameter (p, q) beschrieben werden können. Dies ist unabhängig davon, ob diese Operationen bereits durch einfache holomorphe Abbildungen auf $\mathbb{C}$ realisiert werden.

Satz 3.17 (Negation)**.** *In der Paardarstellung der Evidenzparameter ist Belnap-Negation gegeben durch*

$$\neg(p, q) = (q, p).$$

Auf der Verteilungsebene bedeutet dies

$$(\mu_{\mathsf{N}}, \mu_{\mathsf{T}}, \mu_{\mathsf{F}}, \mu_{\mathsf{B}}) \longmapsto (\mu_{\mathsf{N}}, \mu_{\mathsf{F}}, \mu_{\mathsf{T}}, \mu_{\mathsf{B}}).$$

Proof. Belnap-Negation vertauscht "true only" und "false only" und lässt "neither" sowie "both" fest. Setzt man in die FOUR-Formel statt (p, q) das vertauschte Paar (q, p) ein, so erhält man

$$((1-q)(1-p),\ q(1-p),\ (1-q)p,\ qp).$$

Dies ist genau dieselbe Verteilung wie zuvor, nur mit vertauschten Komponenten μ_{T} und μ_{F}. □

Satz 3.18 (Konjunktion und Disjunktion unter Unabhängigkeit)**.** *Seien zwei Propositionen durch unabhängige Evidenzpaare* (p_1, q_1) *und* (p_2, q_2) *gegeben. Dann gelten für die Belnap-Operationen die Formeln*

$$(p_1, q_1) \wedge (p_2, q_2) = (p_1 p_2,\ q_1 + q_2 - q_1 q_2),$$

$$(p_1, q_1) \vee (p_2, q_2) = (p_1 + p_2 - p_1 p_2,\ q_1 q_2).$$

Proof. Wir schreiben A_j für Evidenz *für* und B_j für Evidenz *gegen* die j-te Proposition. Dann gilt semantisch:

- Für $\alpha \wedge \beta$ ist Evidenz *für* genau dann vorhanden, wenn beide Propositionen Evidenz *für* besitzen. Also ist das positive Evidenzereignis $A_1 \cap A_2$.
- Evidenz *gegen* $\alpha \wedge \beta$ liegt vor, sobald mindestens eine der beiden Propositionen Evidenz *gegen* besitzt. Also ist das negative Evidenzereignis $B_1 \cup B_2$.

Unter der Unabhängigkeitsannahme folgt daher

$$p_\wedge = \mathrm{Prob}(A_1 \cap A_2) = p_1 p_2$$

und

$$q_\wedge = \mathrm{Prob}(B_1 \cup B_2) = q_1 + q_2 - q_1 q_2.$$

Für die Disjunktion ist es dual:

- positive Evidenz ist $A_1 \cup A_2$,
- negative Evidenz ist $B_1 \cap B_2$.

Daher

$$p_\vee = \mathrm{Prob}(A_1 \cup A_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2,$$

$$q_\vee = \mathrm{Prob}(B_1 \cap B_2) = q_1 q_2.$$

Genau dies sind die behaupteten Formeln. □

Bemerkung 3.19. *Diese Formeln sind konzeptionell sehr stark. Sie zeigen, dass Belnap-Logik im gegenwärtigen Modell nicht bloß symbolisch mitläuft, sondern eine echte rechnerische Semantik auf dem Quadrat* $[0, 1]^2$ *besitzt. Zugleich ist offen, welche dieser Operationen durch natürliche Transformationen der komplexen Ebene selbst realisiert werden können. Genau das macht den Übergang zu Möbius-Transformationen, Holomorphie und algebraischen Funktionen so spannend.*

3.6 Erste Konsequenzen für das weitere Forschungsprogramm

Die bisher bewiesenen Sätze liefern sofort ein präziseres Arbeitsprogramm.

1. Die Abbildung $z \mapsto \mu_z$ ist keine beliebige Zuordnung in den Wahrscheinlichkeits-Simplex, sondern parametrisiert eine sehr spezielle Fläche mit der Gleichung $\mu_{\mathsf{N}}\mu_{\mathsf{B}} = \mu_{\mathsf{T}}\mu_{\mathsf{F}}$.
2. Rotation, Skalierung, Potenzen und Inversion haben bereits explizite semantische Transformationsgesetze. Hier kann nun systematisch nach Invarianten gesucht werden.
3. Addition erzeugt Interferenz. Damit entsteht ein klarer Kandidat für eine neuartige "nichtklassische" Wechselwirkung zwischen Propositionen.
4. Die Belnap-Operationen besitzen direkte Formeln auf (p, q). Es ist daher legitim zu fragen, welche komplex-geometrischen Operationen diese Formeln realisieren oder approximieren.

Gerade Punkt 4 motiviert die späteren Untersuchungen zu Möbius-Transformationen und holomorphen Abbildungen: Man möchte wissen, ob die komplexe Analysis nicht nur *begleitende Bilder* liefert, sondern tatsächlich logische Operationen oder logische Invarianten erzeugt.

4 Drei Hauptachsen des Forschungsprogramms

4.1 Achse I: Fundamentalsatz der Algebra und komplexe Analysis

Ziel. Analytische und algebraische Strukturen sollen als Familien probabilistischer Belnap-Propositionen lesbar gemacht werden. Gleichzeitig soll geprüft werden, ob analytische Werkzeuge tatsächlich logische oder probabilistische Aussagen liefern.

I.A Nullstellen von Polynomen als Propositionen

Leitfrage: Was bedeutet eine Nullstellenmenge

$$\{z \in \mathbb{C} : P(z) = 0\}$$

semantisch, wenn jede Nullstelle als Verteilung μ_z gelesen wird?

Konkrete Aufgaben:

I.A1. Entwickle eine **Nullstellen-Semantik** für Polynome: P wird als endliche Familie $\{\mu_{z_1}, \dots, \mu_{z_n}\}$ seiner Wurzeln interpretiert.

I.A2. Untersuche, wie Vielfachheiten logisch/probabilistisch zu lesen sind: stärkere Evidenz? wiederholte Proposition? Resonanz?

I.A3. Definiere **Ensemble-Größen** zu einem Polynom, etwa Mittelwerte

$$\overline{\mu}_P := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_{z_k},$$

und prüfe Invarianzen unter Konjugation und Skalierung.

I.A4. Prüfe, ob spezielle Klassen von Polynomen (selbstinvers, reell, palindromisch, zyklotomisch) charakteristische logische Muster erzeugen.

I.B Zyklotomische Polynome und $x^n - 1$

Dies ist das erste explizite Testfeld. Für

$$P_n(x) = x^n - 1$$

sind die Nullstellen Einheitswurzeln. Da $|z| = 1$ gilt, ist in der zugehörigen Belnap-Verteilung immer $A = \Omega$, also

$$\text{Prob}(\mathsf{N}) = \text{Prob}(\mathsf{F}) = 0,$$

und es bleibt nur die Kante zwischen T und B. Daraus folgt:

- die Einheitswurzeln bilden eine **diskrete logische Skala**,
- konjugierte Wurzeln vertauschen die Gewichte von T und B,
- die zyklotomischen Polynome Φ_n organisieren diese Skala nach exakter Periode.

Arbeitsprogramm bis $n = 6$.

I.B1. Explizite Tabellen für $x^n - 1$ und Φ_n für $n = 1, \ldots, 6$ erstellen.

I.B2. Die Belnap-Verteilungen aller Wurzeln einzeln berechnen und als Diagramme darstellen.

I.B3. Die Rolle der Konjugationssymmetrie und der primitiven Wurzeln getrennt untersuchen.

I.B4. Prüfen, ob aus den logischen Profilen Aussagen über die Faktorisierung, Symmetrie oder Ordnung der Wurzeln hervorgehen.

I.C Holomorphie, Meromorphie, Ableitung, Integration

Leitidee: Nicht nur Zahlen, auch Funktionen sollen semantisch gelesen werden.

Konkrete Unterfragen:

I.C1. **Holomorphie als Kohärenzbedingung:** Welche Bedeutung hat die Cauchy-Riemann-Struktur für die Belnap-Verteilungen der Werte $f(z)$?

I.C2. **Ableitung als lokale semantische Dynamik:** Wie verändert $f'(z)$ die Verteilung $\mu_{f(z)}$ infinitesimal? Ist $|f'(z)|$ ein Maß für semantische Sensitivität, und $\arg f'(z)$ ein lokaler Rotationsoperator auf der Belnap-Seite?

I.C3. **Meromorphie und Pole:** Können Polstellen als logische Singularitäten oder als unendliche Evidenz-Regime gelesen werden?

I.C4. **Residuen:** Lässt sich das Residuum einer meromorphen Funktion als aggregierte semantische Umlaufgröße deuten?

I.C5. **Konturintegrale:** Gibt es eine Interpretation komplexer Integrale als globale Mittelung, Transport oder Bilanz von Belnap-Zuständen entlang eines Weges?

I.D Riemannsche Zetafunktion und L-Funktionen

Die nichttrivialen Nullstellen der Zetafunktion liegen im kritischen Streifen $0 < \Re s < 1$ und sind symmetrisch zur reellen Achse und zur kritischen Geraden $\Re s = 1/2$. [2]

Forschungsfragen:

I.D1. Welche Verteilungen μ_ρ entstehen aus den Nullstellen ρ der Zetafunktion?

I.D2. Führt die Symmetrie $\rho \leftrightarrow \bar{\rho}$ zu komplementären oder dualen Belnap-Profilen?

I.D3. Wie ist die kritische Gerade $\Re s = 1/2$ zu lesen: als balancierter Evidenzzustand, als phasenstabile Grenzlinie oder als Symmetrieachse semantischer Ausgewogenheit?

I.D4. Lässt sich die Nullstellenstatistik in eine Statistik von Belnap-Propositionen übersetzen?

I.D5. Welche Rolle spielen triviale Nullstellen und Pole von meromorphen L-Funktionen in dieser Semantik?

I.E Möbius-Transformationen und hyperbolische Geometrie

Möbius-Transformationen sind die Automorphismen der Riemannschen Sphäre; sie sind genau die bijektiven konformen Selbstabbildungen von $\widehat{\mathbb{C}}$ und stehen eng mit hyperbolischer Geometrie in Beziehung. [3]

Forschungsfragen:

I.E1. Wie transformiert μ_z unter

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

zu einer neuen Verteilung $\mu_{M(z)}$?

I.E2. Welche Klassen elliptisch/parabolisch/hyperbolisch/loxodromisch erzeugen charakteristische Dynamiken auf der Belnap-Seite? [3]

I.E3. Ist die Inversionsregel mit Möbius-Symmetrie kompatibel oder muss sie verallgemeinert werden?

I.E4. Kann die hyperbolische Geometrie der Einheitsdisk oder Halbebene als **Geometrie des logischen Informationsraums** interpretiert werden?

I.E5. Welche Bedeutung haben Fixpunkte von Möbius-Transformationen als stabile Propositionen oder semantische Attraktoren?

I.F Elliptische Kurven und Modulformen

Elliptische Kurven, Modulformen und ihre L-Funktionen bilden bereits klassisch ein eng gekoppeltes Feld; die Modularity-Thematik ist eines der prominentesten Beispiele dafür. [4, 5, 6]

Hier ist besondere Vorsicht nötig: Dieser Teil ist *explorativ* und sollte nicht mit vorschnellen Behauptungen beginnen. Stattdessen wird ein Programm formuliert:

I.F1. Torsionspunkte elliptischer Kurven als diskrete semantische Zustände untersuchen.

I.F2. Periodengitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$ als semantische Quotientenräume analysieren.

I.F3. Modulformen zunächst nicht "inhaltlich logisch" lesen, sondern als **Transformationsgesetze**: Welche Belnap-Strukturen bleiben unter modularem Verhalten invariant?

I.F4. Prüfen, ob die Fourier-Koeffizienten oder Nullstellen von Modulformen probabilistisch-logische Profile tragen.

I.F5. Erst nach einfachen Beispielen ($E : y^2 = x^3 - x$, Theta-Reihen, Eisensteinreihen) über weitergehende Hypothesen entscheiden.

4.2 Achse II: Mehrstufige 2-Bernoulli-Experimente und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ziel. Die Polar-Semantik soll von der Zweistufigkeit zu einer echten Theorie mehrstufiger Experimente ausgebaut werden. Dabei ist zu klären, welche Teile klassischer Wahrscheinlichkeitsrechnung erhalten bleiben und welche neuartigen Strukturen auftreten.

II.A Von zwei Stufen zu m Stufen

Ausgehend von den beiden Schwellenparametern r und s ist zu untersuchen, wie eine natürliche m-stufige Verallgemeinerung aussieht.

Mögliche Richtungen:

II.A1. Iterierte Polar-Codierungen: Zahlen, Funktionen oder Nullstellenfamilien erzeugen Sequenzen von 2-Bernoulli-Schritten.

II.A2. Verzweigungsbäume und Markov-artige Dynamiken auf Belnap-Zuständen.

II.A3. Produktstrukturen für unabhängige komplexe Zahlen bzw. Propositionen.

II.A4. Entropie, Divergenz und Informationsmaße auf der Menge der Belnap-Verteilungen.

II.B Bedingte Wahrscheinlichkeit, Bayes und Aktualisierung

Forschungsfragen:

II.B1. Wie wird bedingte Wahrscheinlichkeit auf $\mathrm{Prob}\{\mathsf{N},\mathsf{T},\mathsf{F},\mathsf{B}\}$ formuliert?

II.B2. Welche Bayes-ähnlichen Update-Regeln sind mit der Belnap-Semantik kompatibel?

II.B3. Welche Rolle spielen die beiden Achsen *Evidenz für* und *Evidenz gegen* in bedingten Aktualisierungen?

II.B4. Gibt es eine natürliche Kopplung zwischen Belnaps Wahrheits- und Wissensordnung und probabilistischen Ordnungen?

II.C Zufallsvariablen mit Werten in Belnap

Eine natürliche Erweiterung ist die Einführung von Zufallsvariablen

$$X : \Omega \to \{\mathsf{N},\mathsf{T},\mathsf{F},\mathsf{B}\}$$

oder äquivalent von Zufallsvariablen Z mit Werten in $\mathbb{C}$, deren Bild über $Z \mapsto \mu_Z$ auf Belnap-Verteilungen projiziert wird.

Zu untersuchen sind:

II.C1. Erwartungswerte und baryzentrische Mittel in $\mathrm{Prob}\{\mathsf{N},\mathsf{T},\mathsf{F},\mathsf{B}\}$,

II.C2. Konvergenzbegriffe,

II.C3. Martingal-artige Begriffe für Evidenzprozesse,

II.C4. Grenzwertsätze für Familien komplex codierter Propositionen.

4.3 Achse III: Belnap-Logik und bilattizische Semantik

Ziel. Es soll präzise geklärt werden, was die komplex-probabilistische Sicht der Belnap-Logik *tatsächlich* hinzufügt: neue Modelle, neue Semantik, neue Inferenzkriterien oder neue Visualisierungsmethoden.

III.A Saubere logische Rekonstruktion

Belnap/Dunn-FOUR ist die geeignete vierwertige Referenzlogik für unvollständige und inkonsistente Information. [1]

Arbeitsaufgaben:

III.A1. Die Basiskonstruktion formal als Belnap-Semantik rekonstruieren.

III.A2. Wahrheits- und Wissensordnung explizit neben die probabilistische Struktur stellen.

III.A3. Klären, welche Junktoren punktweise auf Verteilungen, welche nur auf Trägern, und welche über Optimierungs- oder Erwartungsprinzipien definiert werden sollten.

III.B Probabilistische Belnap-Logik

Ziel ist eine Logik, in der Formeln nicht nur einen FOUR-Wert, sondern eine Verteilung auf FOUR erhalten.

Offene Fragen:

III.B1. Wie definiert man semantische Konsequenz für probabilistische Belnap-Werte?

III.B2. Welche Rollen spielen designierte Werte (T, B oder nur T)?

III.B3. Welche Metriken oder Ordnungen auf Verteilungen sind logisch sinnvoll?

III.B4. Gibt es eine kanonische "Defuzzifizierung" zurück zu FOUR oder zu klassischer Zweiwertigkeit?

III.C Lösen analytischer Probleme mit Logik — und umgekehrt

Hier liegt der eigentliche Mehrwerttest.

Beispielfragen:

III.C1. Kann eine bilattizische Ordnung Symmetrien oder Invarianzen analytischer Objekte sichtbar machen, die in Standardkoordinaten unauffällig bleiben?

III.C2. Können Nullstellenfamilien durch logische Ordnungen oder Dominanzrelationen klassifiziert werden?

III.C3. Gibt es analytische Aussagen, die als Konsequenz von Belnap-Kompatibilität formuliert werden können?

III.C4. Umgekehrt: Lassen sich logische Probleme (Widerspruchsmanagement, Inferenz unter Inkonsistenz, Mehrdeutigkeit) mit komplex-analytischen oder geometrischen Werkzeugen behandeln?

5 Konkrete Testfelder und Reihenfolge der Bearbeitung

5.1 Phase 1: Voll explizite, kleine Objekte

1. $x^n - 1$ und Φ_n für $n = 1, \ldots, 6$.

2. Quadratische und kubische Polynome mit reellen und mit komplexen Koeffizienten.

3. Einfache Möbius-Transformationen:

$$z \mapsto -z, \qquad z \mapsto \frac{1}{z}, \qquad z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \qquad z \mapsto e^{i\theta}z.$$

4. Elementare meromorphe Funktionen:

$$f(z) = z^m, \quad f(z) = \frac{1}{z}, \quad f(z) = \frac{z-a}{z-b}.$$

5.2 Phase 2: Struktur und Theorie

1. Natürliche Kategorien oder Funktoren formulieren, die Zahlen, Funktionen und Verteilungen verbinden.
2. Invarianz- und Kovarianzsätze unter Konjugation, Rotation, Inversion und Möbius-Wirkung beweisen.
3. Ein sauberes Axiomensystem für probabilistische Belnap-Semantik formulieren.

5.3 Phase 3: Arithmetische und tiefe Testobjekte

1. Riemannsche Zetafunktion und einfache Dirichlet-L-Funktionen.
2. Erste Modulformen und ihre Nullstellen.
3. Erste elliptische Kurven und Torsionsdaten.
4. Vergleich mit Datenbanken und numerischen Experimenten.

6 Welchen Nutzen soll jede Seite von der Brücke haben?

Ausgangsseite	**Möglicher Nutzen für die anderen Seiten**	**Prüfbare Erfolgskriterien**
Komplexe Analysis / Algebra	Nullstellen, Symmetrien, Konformalität und Singularitäten erhalten eine semantische und probabilistische Lesart.	Neue Invarianz- oder Klassifikationssätze; explizite Berechnungen bei $x^n - 1$, Φ_n, Möbius-Klassen, ζ.
Wahrscheinlichkeits-rechnung	Mehrstufige Bernoulli-Strukturen werden geometrisiert; Belnap-Werte erhalten eine natürliche Wahrscheinlichkeitssemantik.	Saubere Update-Regeln, Grenzprozesse, Entropien und Verteilungen auf FOUR.
Belnap-Logik	Inkomplettheit und Widerspruch können über komplexe Geometrie, Nullstellen und Transformationen untersucht werden.	Neue semantische Modelle; bilattizische Ordnungen kompatibel mit analytischen Operationen; nichttriviale Anwendungen.

7 Risikopunkte und methodische Disziplin

Damit das Projekt tragfähig bleibt, sollten die folgenden Risiken früh kontrolliert werden:

1. **Metaphernrisiko:** Nicht jede schöne Visualisierung ist schon ein mathematischer Satz. Früh zwischen Definition, Heuristik und Theorem unterscheiden.
2. **Überdehnung:** Zetafunktion, elliptische Kurven und Modulformen sind inhaltlich tief. Daher erst mit einfachen Beispielen und Invarianzen beginnen.
3. **Logische Präzision:** Immer klar angeben, ob ein Objekt einen FOUR-Wert, eine Verteilung auf FOUR oder eine Familie solcher Verteilungen trägt.
4. **Analytische Präzision:** Nicht jede holomorphe Operation wird mit der gewählten Inversions- und Argumentkonvention kompatibel sein. Das muss bewiesen, nicht nur vermutet werden.

8 Sofort umsetzbare nächste Arbeiten

1. **Mini-Monographie zu $x^n - 1$ und Φ_n für $n \leq 6$:** vollständige explizite Ausarbeitung mit Tabellen, Diagrammen und Sätzen.
2. **Paper zu probabilistischer Belnap-Semantik komplexer Zahlen:** saubere Definitionen, Grundbeispiele, Invarianz unter Konjugation/Inversion/Rotation.
3. **Paper zu Möbius-Wirkung:** Pushforward der Belnap-Verteilungen unter ausgewählten Möbius-Transformationen.
4. **Notiz zu ζ-Nullstellen als Propositionen:** zunächst nur Definitionen, erste numerische Profile und Symmetriefragen; keine großen Behauptungen vorweg.
5. **Axiomatik:** eine präzise Klasse "probabilistischer Belnap-Modelle" definieren und mit klassischer FOUR-Semantik vergleichen.

9 Mein Gesamturteil

Die Idee hat echtes Potential, gerade weil sie keine bloße metaphorische Analogie sein muss. Ihr stärkster Punkt ist die klare und einfache Basiskonstruktion

$$z \rightsquigarrow \mu_z \in \mathrm{Prob}\{\mathsf{N}, \mathsf{T}, \mathsf{F}, \mathsf{B}\},$$

und ihr größter Mehrwert wäre erreicht, wenn sich mindestens eines der folgenden Ziele realisiert:

- ein neuer, sauber formulierter Satz über analytische Objekte mit logischer Bedeutung,
- eine neue probabilistische Semantik von Belnap-Typ mit natürlicher komplexer Geometrie,

- ein konkretes Problem aus Logik oder Wahrscheinlichkeit, das durch analytische Werkzeuge *tatsächlich* besser lösbar wird.

Als Forschungsstrategie ist daher die richtige Reihenfolge:

erst explizite kleine Beispiele, dann Invarianztheorie, erst danach tiefe arithmetische Objekte.

Ausgewählte Referenzpunkte

References

[1] J. Marcos, *Many-Valued Logic*, Stanford Encyclopedia of Philosophy, insbesondere die Diskussion von Dunn/Belnap/FDE.

[2] NIST Digital Library of Mathematical Functions, Chapter 25: *Zeta and Related Functions*, insbesondere §25.10 über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion.

[3] Übersichtsartikel zu Möbius-Transformationen, ihrer Klassifikation und ihrer Beziehung zur Riemannschen Sphäre und hyperbolischen Geometrie.

[4] LMFDB: *Elliptic Curves*, *Modular Forms*, *L-functions*; als Referenz- und Datenquelle für konkrete Testobjekte.

[5] J. S. Milne, *Modular Functions and Modular Forms*, Kursnotizen.

[6] D. Zagier, *Elliptic Modular Forms and Their Applications*.